

Thermodynamique des processus irréversibles

14.1 Équation de diffusion de la chaleur

★☆★☆★ Montrer que le profil de température (12.56),

$$T(x, t) = \frac{C}{\sqrt{4\pi\lambda t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \equiv \frac{D}{t^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right)$$

où T est la température et x la coordonnée spatiale, est une solution de l'équation de diffusion de la chaleur (12.47).

14.1 Solution

Pour montrer que le profil de température $T(x, t)$ est une solution de l'équation de diffusion de la chaleur (12.47), on doit calculer les dérivées partielles de cette fonction. La dérivée partielle de la température T par rapport au temps t est donnée par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D}{t^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \right) + \frac{D}{t^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \right) \\ &= -\frac{D}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) + \frac{Dx^2}{4\lambda t^{5/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \end{aligned}$$

La dérivée partielle première de la température T par rapport à la position x s'écrit,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{D}{t^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \right) = -\frac{Dx}{2\lambda t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right)$$

ce qui implique que le produit de λ et de la dérivée partielle seconde de la température T par rapport à la position x est donné par,

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Dx}{2\lambda t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \right) - \lambda \frac{Dx}{2\lambda t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \right) \\ &= -\frac{D}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) + \frac{Dx^2}{4\lambda t^{5/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que les expressions pour $\partial T / \partial t$ et $\lambda \partial^2 T / \partial x^2$ sont identiques, ce qui établit que le profil de température $T(x, t)$ est une solution de l'équation de diffusion de la chaleur (12.47).

14.2 Équation de la chaleur avec une source de chaleur

★★★ L'équation de diffusion de la chaleur a été établie au paragraphe 12.4.2, en l'absence de terme de source lié au transport des électrons de conduction. On considère que le potentiel chimique des électrons est négligeable par rapport au potentiel électrostatique, c'est-à-dire que $\mu_e \ll q_e \varphi$.

1) Montrer que la densité de puissance dissipée s'écrit,

$$p_s = -\nabla \cdot \mathbf{j}_u$$

2) À l'aide de la densité de puissance dissipée (12.129),

$$p_s = \kappa \nabla^2 T - \tau \mathbf{j}_q \cdot \nabla T + \frac{\mathbf{j}_q^2}{\sigma}$$

en déduire que pour un conducteur électriquement neutre traversé par une densité de courant électrique conductif \mathbf{j}_q , l'équation de la chaleur devient,

$$\partial_t T = \lambda \nabla^2 T - \frac{\tau}{c_e} \mathbf{j}_q \cdot \nabla T + \frac{\mathbf{j}_q^2}{c_e \sigma}$$

où λ est la diffusivité thermique, σ est la conductivité électrique, ε est le coefficient Seebeck, τ est le coefficient de Thomson du conducteur électrique et c_e est la densité de capacité thermique des électrons de conduction.

14.2 Solution

- 1) Dans le référentiel du conducteur électrique, c'est-à-dire $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, et en absence de contrainte mécanique exercée sur le métal, c'est-à-dire $\sigma_u = 0$, l'équation de continuité pour l'énergie interne (11.54) se réduit à,

$$\dot{u} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_u$$

Comme le conducteur électrique est électriquement neutre, la charge électrique des électrons de conduction est constante,

$$\dot{q} = 0$$

Compte tenu de la limite $\mu_e \ll q_e \varphi$, la dérivée temporelle de l'équation d'Euler densitaire volumique (11.98) pour les électrons de conduction s'écrit,

$$\dot{u} = T \dot{s} + \bar{\mu}_e \dot{n}_e = T \dot{s} + \varphi \dot{q} = T \dot{s}$$

Ainsi, la densité de puissance dissipée (12.121) devient,

$$p_s = T \dot{s} = \dot{u} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_u$$

- 2) Dans le référentiel du conducteur électrique, on a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Compte tenu de la relation (12.43), la dérivée temporelle de la densité d'énergie interne s'écrit,

$$\dot{u} = \partial_t u = c_e \partial_t T$$

Ainsi, l'équation de continuité de l'énergie interne devient,

$$\partial_t T = -\frac{1}{c_e} (\nabla \cdot \mathbf{j}_u) = \frac{p_s}{c_e}$$

La densité de puissance dissipée (12.129) s'écrit,

$$p_s = \kappa \nabla^2 T - \tau \mathbf{j}_q \cdot \nabla T + \frac{\mathbf{j}_q^2}{\sigma}$$

Compte tenu du coefficient de diffusivité thermique (12.46), en substituant la densité de puissance dissipée dans l'équation de continuité de l'énergie interne, on obtient l'équation de la chaleur,

$$\partial_t T = \lambda \nabla^2 T - \frac{\tau}{c_e} \mathbf{j}_q \cdot \nabla T + \frac{\mathbf{j}_q^2}{c_e \sigma}$$

Elle contient deux termes de source de chaleur liés au transport des électrons de conduction décrit par la densité de courant électrique \mathbf{j}_q : un premier terme lié à l'effet Thomson et un deuxième terme associé à l'effet Joule.

14.3 Générateur Peltier

★★★★★ Un générateur Peltier est constitué de deux éléments thermoélectriques reliés en série (fig. 14.1). Le côté gauche du générateur est maintenu à une température T^+ et le côté droit, à une température T^- . Le courant électrique I généré par le générateur Peltier circule à travers les matériaux thermoélectriques dénotés 1 et 2. La plaque chauffée à température T^+ relie électriquement les deux matériaux, mais elle n'est pas électriquement accessible à l'utilisateur. Son potentiel électrique est V^+ . Les autres extrémités des matériaux thermoélectriques sont du côté froid, à température T^- . Ils sont reliés aux bornes électriques du dispositif. Une résistance de charge R_0 est reliée à ces bornes. La tension V est la différence de potentiel électrique entre les bornes.

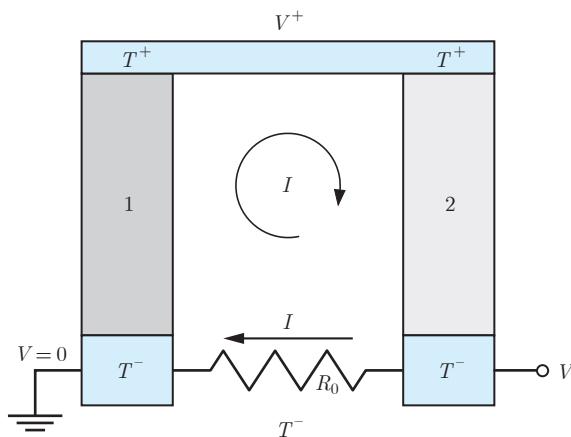


Fig. 14.1 Un générateur Peltier a une charge représentée par la résistance R_0 reliée aux bornes. V est la tension entre les bornes. Le pont électrique à V^+ n'est pas accessible à l'utilisateur. Les régions notées 1 et 2 représentent les deux matériaux thermoélectriques. Les régions notées T^+ et T^- sont les côtés chaud et froid du dispositif.

On analyse le fonctionnement de ce générateur à l'aide des équations de transport de la charge électrique et de la chaleur,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{q_1} &= -\sigma_1 \varepsilon_1 \nabla T_1 - \sigma_1 \nabla \varphi_1 & \text{et} & \quad \mathbf{j}_{Q_1} = -\kappa_1 \nabla T_1 + T_1 \varepsilon_1 \mathbf{j}_{q_1} \\ \mathbf{j}_{q_2} &= -\sigma_2 \varepsilon_2 \nabla T_2 - \sigma_2 \nabla \varphi_2 & \text{et} & \quad \mathbf{j}_{Q_2} = -\kappa_2 \nabla T_2 + T_2 \varepsilon_2 \mathbf{j}_{q_2} \end{aligned}$$

Les matériaux thermoélectriques 1 et 2 ont une longueur d et une section d'aire A , ce qui peut s'écrire comme,

$$d = \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad A = \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est un vecteur unitaire orienté dans le sens des aiguilles d'une montre le long de la densité de courant électrique \mathbf{j}_q , et les vecteurs infinitésimaux de longueur et de surface $d\mathbf{r}$ et $d\mathbf{S}$ sont orientés dans la même direction. La

différence de température entre le côté chaud et le côté froid s'écrit,

$$\Delta T = T^+ - T^- = \int_0^d \mathbf{dr} \cdot \nabla T_1 = \int_0^d \mathbf{dr} \cdot (-\nabla T_2)$$

De manière similaire, les différences de potentiel électrique $\Delta \varphi_1$ et $\Delta \varphi_2$ entre les côtés chaud et froid s'écrivent,

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_1 &= V^+ = \int_0^d \mathbf{dr} \cdot \nabla \varphi_1 \\ \Delta \varphi_2 &= V^+ - V = \int_0^d \mathbf{dr} \cdot (-\nabla \varphi_2)\end{aligned}$$

La conservation de la charge électrique implique que les densités de courant électrique sont les mêmes pour chaque matériau, c'est-à-dire $\mathbf{j}_{q_1} = \mathbf{j}_{q_2}$. Le courant électrique I traversant les matériaux 1 et 2 est donné par l'intégrale des densités de courant électrique \mathbf{j}_{q_1} et \mathbf{j}_{q_2} sur la surface A de la section,

$$I = \int_S \mathbf{j}_{q_1} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}_{q_2} \cdot d\mathbf{S}$$

D'après la relation (11.122), les courants de chaleur I_{Q_1} et I_{Q_2} sont les intégrales des densités de courant de chaleur \mathbf{j}_{Q_1} et \mathbf{j}_{Q_2} , traversant les matériaux 1 et 2, sur la surface A de la section,

$$I_{Q_1} = \int_S (-\mathbf{j}_{Q_1}) \cdot d\mathbf{S} \quad I_{Q_2} = \int_S \mathbf{j}_{Q_2} \cdot d\mathbf{S}$$

Déterminer :

- 1) le courant de chaleur I'_Q appliqué sur le côté chaud du dispositif lorsque aucun courant électrique ne le traverse ;
- 2) la résistance électrique R des deux matériaux thermoélectriques lorsque les températures sont égales, c'est-à-dire $T^+ = T^-$, et qu'aucun courant électrique ne traverse la résistance R_0 , c'est-à-dire lorsque $R_0 = \infty$. Dans ce cas, un courant électrique traverse les matériaux thermoélectriques sans traverser la résistance ;
- 3) le courant électrique I en termes de la différence de température ΔT ;
- 4) le rendement thermodynamique du générateur défini comme,

$$\eta = \frac{R_0 I^2}{I_Q}$$

où ici, I_Q est le courant chaleur du côté chaud à température T^+ lorsque le courant électrique traverse le dispositif. Montrer que la résistance de charge optimale s'écrit,

$$R_0 = R \sqrt{1 + \zeta}$$

où ζ est un paramètre sans dimension donné par⁽¹⁾,

$$\zeta = \frac{T^+ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right)}$$

14.3 Solution

- 1) Afin de déterminer le courant de chaleur I'_Q lorsque aucun courant électrique ne circule dans le circuit, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{j}_{q_1} = \mathbf{j}_{q_2} = \mathbf{0}$, on intègre les équations de transport sur le volume V . Les intégrales sur le volume sont le produit des intégrales sur la section d'aire A et des intégrales sur la longueur d des matériaux thermoélectriques,

$$\begin{aligned} \int_S (-\mathbf{j}'_{Q_1}) \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \kappa_1 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \nabla T_1 \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ \int_S \mathbf{j}'_{Q_2} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \kappa_2 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_2) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

ce qui se réduit à,

$$P'_{Q_1} = \kappa_1 \frac{A}{d} \Delta T \quad P'_{Q_2} = \kappa_2 \frac{A}{d} \Delta T$$

Ainsi, le courant de chaleur total est donnée par,

$$I'_Q = I'_{Q_1} + I'_{Q_2} = (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{A}{d} \Delta T$$

- 2) Si les températures des sources chaude et froide sont égales, c'est-à-dire si $T^+ = T^-$, les gradients de température s'annulent, c'est-à-dire $\nabla T_1 = \nabla T_2 = \mathbf{0}$, ce qui implique qu'il n'y a pas d'effet thermoélectrique. Les intégrales des équations de transport de la charge électrique sur le volume sont le produit des intégrales sur la section d'aire A et des intégrales sur la longueur d des matériaux thermoélectriques,

$$\begin{aligned} \int_S (-\mathbf{j}_{q_1}) \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \sigma_1 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi_1 \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ \int_S (-\mathbf{j}_{q_2}) \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= -\sigma_2 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla \varphi_2) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Étant donné que la résistance de charge est infinie, c'est-à-dire que $R_0 = \infty$, le courant électrique utilisé pour la mesure de la résistance du dispositif circule dans la direction opposée, $I \rightarrow -I$ compte tenu de la condition

⁽¹⁾ H. J. Goldsmid, *Introduction to Thermoelectricity*, Springer, 2010.

$V^+ < V$. Dans ce cas, les équations de transport de la charge électrique intégrées sur le volume se réduisent à,

$$I = \sigma_1 \frac{A}{d} \Delta \varphi_1 = \sigma_1 \frac{A}{d} V^+$$

$$I = -\sigma_2 \frac{A}{d} \Delta \varphi_2 = -\sigma_2 \frac{A}{d} (V^+ - V)$$

La différence de potentiel électrique entre les extrémités des matériaux thermoélectriques 1 et 2 branchés en série est donnée par,

$$V = \Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2 = I \frac{d}{A} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) = I \frac{2d}{A} \frac{1}{\sigma}$$

où σ est la conductivité effective des deux matériaux thermoélectriques. Étant donné que la résistivité électrique ρ est l'inverse de la conductivité électrique effective σ ,

$$\rho = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right)$$

Ainsi, la différence de potentiel électrique entre les extrémités des matériaux thermoélectriques s'écrit,

$$V = \rho \frac{2d}{A} I = RI$$

où $2d$ est la longueur effective des deux matériaux de longueur d chacun, de section d'aire A , branchés en série, et R est leur résistance effective. Ainsi,

$$R = \rho \frac{2d}{A} = (\rho_1 + \rho_2) \frac{d}{A} = \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \frac{d}{A}$$

- 3) Les intégrales des équations de transport de la charge électrique sur le volume sont le produit des intégrales sur la section d'aire A et des intégrales sur la longueur d des matériaux thermoélectriques,

$$\int_S \mathbf{j}_{q_1} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\sigma_1 \varepsilon_1 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \nabla T_1 \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$- \sigma_1 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi_1 \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$\int_S \mathbf{j}_{q_2} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sigma_2 \varepsilon_2 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_2) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$+ \sigma_2 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla \varphi_2) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

Les équations de transport de la charge électrique intégrées sur le volume se réduisent à,

$$I = -\sigma_1 \varepsilon_1 \frac{A}{d} \Delta T - \sigma_1 \frac{A}{d} V^+$$

$$I = \sigma_2 \varepsilon_2 \frac{A}{d} \Delta T + \sigma_2 \frac{A}{d} (V^+ - V)$$

La loi d'Ohm pour la résistance de charge s'écrit,

$$V = R_0 I$$

Compte tenu de cette relation qui caractérise les propriétés électriques de la résistance de charge, les équations de transport de la charge électrique peuvent être mises sous la forme suivante,

$$V^+ = -\frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{d}{A} I + \sigma_1 \varepsilon_1 \Delta T \right)$$

$$V^+ = \frac{1}{\sigma_2} \left(\left(\frac{d}{A} + \sigma_2 R_0 \right) I - \sigma_2 \varepsilon_2 \Delta T \right)$$

ce qui implique que le courant électrique est donné par,

$$I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \frac{d}{A} + R_0} \Delta T = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R + R_0} \Delta T$$

Ce résultat pour le courant I est cohérent avec l'expression du courant obtenue en analysant la boucle de Seebeck (sect. 12.6.1), qui est équivalent à un générateur Peltier (fig. 14.1) pour lequel la résistance de charge est mise à zéro, c'est-à-dire que $R_0 = 0$.

- 4) Afin de déterminer le courant de chaleur I_Q qui entre à travers la plaque chaude à température T^+ , on intègre les équations de transport de la chaleur sur le volume V . Les intégrales sur le volume sont le produit des intégrales sur la section d'aire A et des intégrales sur la longueur d des matériaux thermoélectriques,

$$\int_S (-\mathbf{j}_{Q_1}) \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \kappa_1 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \nabla T_1 \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$- T^+ \varepsilon_1 \int_S \mathbf{j}_{q_1} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$\int_S \mathbf{j}_{Q_2} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \kappa_2 \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_2) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

$$+ T^+ \varepsilon_2 \int_S \mathbf{j}_{q_2} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

qui se réduit à,

$$I_{Q_1} = \kappa_1 \frac{A}{d} \Delta T - T^+ \varepsilon_1 I$$

$$I_{Q_2} = \kappa_2 \frac{A}{d} \Delta T + T^+ \varepsilon_2 I$$

et implique que,

$$I_Q = I_{Q_1} + I_{Q_2} = (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{A}{d} \Delta T + T^+ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) I$$

Par conséquent, le rendement η pour une résistance de charge R_0 est donné par,

$$\eta = \frac{R_0 I^2}{I_Q} = \frac{R_0 \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 \Delta T^2}{(R + R_0)^2}}{(\kappa_1 + \kappa_2) \frac{A}{d} \Delta T + T^+ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 \frac{\Delta T}{R + R_0}}$$

qui peut être mis sous la forme,

$$\eta = \frac{\Delta T}{T^+} \frac{\frac{R_0}{R}}{\frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{T^+ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \left(1 + \frac{R_0}{R} \right)^2 + \left(1 + \frac{R_0}{R} \right)}$$

À l'aide de la définition du coefficient $\zeta > 0$, de la différence de température $\Delta T = T^+ - T^- > 0$ et du rapport $r = 1 + R_0/R > 0$, le rendement se réduit à,

$$\eta = \left(1 - \frac{T^-}{T^+} \right) \frac{r - 1}{\zeta^{-1} r^2 + r}$$

Afin de trouver la résistance de charge optimale, on doit optimiser le rendement η par rapport au rapport r ,

$$\frac{d\eta}{dr} = \left(1 - \frac{T^-}{T^+} \right) \frac{\zeta^{-1} r^2 + r - (r - 1)(2\zeta^{-1} r + 1)}{(\zeta^{-1} r^2 + r)^2} = 0$$

ce qui implique que,

$$r^2 - 2r - \zeta = 0$$

Ainsi, le rapport optimal $r > 0$, est donné par,

$$r = 1 + \sqrt{1 + \zeta}$$

Par conséquent, pour une résistance de charge optimale, le rendement est donné par,

$$\eta = \left(1 - \frac{T^-}{T^+} \right) \frac{\zeta \sqrt{1 + \zeta}}{\left(1 + \sqrt{1 + \zeta} \right)^2 + \zeta \left(1 + \sqrt{1 + \zeta} \right)} \leq 1 - \frac{T^-}{T^+}$$

Dans la limite $\zeta \rightarrow \infty$, le rendement du générateur Peltier η tend vers le rendement de Carnot η_C (7.63),

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \eta = 1 - \frac{T^-}{T^+} = \eta_C$$

14.4 Jonction thermoélectrique

★★★★ On considère un barreau constitué de deux métaux différents A et B d'épaisseur d en contact thermique. Les métaux sont définis par leur conductivité électrique σ_A ou σ_B , leur conductivité thermique κ_A ou κ_B , et leur coefficient Seebeck ε_A ou ε_B . Ces propriétés peuvent toutes être considérées comme

indépendantes de la température. L'extrémité du métal A est en contact avec un bain thermique à haute température et l'extrémité du métal B est en contact avec un bain thermique à basse température, ce qui impose une différence de température ΔT à travers le barreau. Une densité de courant électrique j_q constante traverse le barreau. On mesure une différence de potentiel électrostatique $\Delta\varphi$ entre les extrémités du barreau (fig. 14.2).

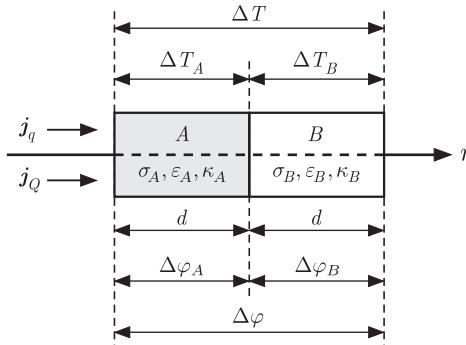


Fig. 14.2 Un courant électrique traverse un barreau formé de deux métaux différents A et B en contact électrique. La figure indique les variations de potentiel électrostatique et de température à travers chaque métal. L'origine de l'axe Or est située à la jonction entre les deux métaux.

Par conservation de la charge électrique en régime stationnaire, la densité de courant électrique j_q et la densité de courant de chaleur j_Q sont conservées à la jonction entre les métaux A et B , c'est-à-dire que $j_q = j_{q_A} = j_{q_B}$ et $j_Q = j_{Q_A} = j_{Q_B}$. Le courant électrique I qui traverse les métaux A et B est l'intégrale des densités de courant j_{q_A} et j_{q_B} sur la surface A de la section,

$$I = \int_S j_{q_A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S j_{q_B} \cdot d\mathbf{S}$$

où le vecteur de surface infinitésimal $d\mathbf{S}$ est orienté le long de la densité de courant électrique j_q . Le courant de chaleur I_Q exercé sur les métaux A et B est l'intégrale des densités de courant de chaleur j_{Q_A} et j_{Q_B} sur la surface A de la section,

$$I_Q = \int_S j_{Q_A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S j_{Q_B} \cdot d\mathbf{S}$$

Les différences de température ΔT_A et ΔT_B , et les différences de potentiel électrostatique $\Delta\varphi_A$ et $\Delta\varphi_B$ à travers les métaux A et B sont données par,

$$\begin{aligned} \Delta T_A &= \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_A) & \text{et} & \Delta T_B = \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_B) \\ \Delta\varphi_A &= \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot (-\nabla\varphi_A) & \text{et} & \Delta\varphi_B = \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla\varphi_B) \end{aligned}$$

où le vecteur de longueur infinitésimal $d\mathbf{r}$ est orienté le long de la densité de courant électrique j_q et de la densité de courant de chaleur j_Q . La différence

de température ΔT et la différence de potentiel électrostatique $\Delta\varphi$ à travers tout le barreau satisfont,

$$\Delta T = \Delta T_A + \Delta T_B \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = \Delta\varphi_A + \Delta\varphi_B$$

Les métaux A et B ont une longueur d et une section de surface A . Ainsi,

$$d = \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad A = \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire orienté de la gauche vers la droite dans le même sens que la densité de courant électrique \mathbf{j}_q et la densité de courant de chaleur \mathbf{j}_Q .

- 1) Exprimer les équations de transport de la charge électrique et de la chaleur (12.117) pour les métaux A et B à la jonction entre les métaux en termes des forces généralisées ∇T_A , ∇T_B , $\nabla\varphi_A$, $\nabla\varphi_B$ et de la température T_{AB} évaluée à la jonction entre les métaux.
- 2) Si l'épaisseur d des métaux est suffisamment petite, les gradients peuvent être considérés comme indépendants de la position. Dans ce cas, intégrer l'équation de transport de la charge électrique entre les extrémités des métaux A et B .
- 3) Dans ce même cas, intégrer l'équation de transport de la chaleur entre les extrémités des métaux A et B .
- 4) En déduire les expressions de ΔT_A et ΔT_B en termes de I , ΔT et des coefficients phénoménologiques.
- 5) En déduire les expressions de $\Delta\varphi_A$ et $\Delta\varphi_B$ en termes de I , ΔT et des coefficients phénoménologiques.
- 6) Déterminer l'expression de $\Delta\varphi$ en termes de T_{AB} , I , ΔT et des coefficients phénoménologiques.

14.4 Solution

- 1) Les équations de transport de la charge électrique à travers les métaux A et B à la jonction entre ces métaux s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{q_A} &= -\sigma_A \varepsilon_A \nabla T_A - \sigma_A \nabla \varphi_A \\ \mathbf{j}_{q_B} &= -\sigma_B \varepsilon_B \nabla T_B - \sigma_B \nabla \varphi_B \end{aligned}$$

De manière similaire, les équations de transport de la chaleur à travers les métaux A et B à la jonction entre ces métaux s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{Q_A} &= -\kappa_A \nabla T_A + T_{AB} \varepsilon_A \mathbf{j}_q \\ \mathbf{j}_{Q_B} &= -\kappa_B \nabla T_B + T_{AB} \varepsilon_B \mathbf{j}_q \end{aligned}$$

- 2) Les intégrales des équations de transport de la charge électrique sur le volume sont le produit des intégrales sur la section de surface A et des

intégrales sur la longueur d des métaux,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{j}_{q_A} \cdot d\mathbf{S} \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \sigma_A \varepsilon_A \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_A) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \sigma_A \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot (-\nabla \varphi_A) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ \int_S \mathbf{j}_{q_B} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \sigma_B \varepsilon_B \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_B) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \sigma_B \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla \varphi_B) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

En utilisant les relations intégrales pour I , ΔT_A , ΔT_B , $\Delta \varphi_A$ et $\Delta \varphi_B$, l'intégrale de l'équation de transport de la charge électrique à travers les métaux A et B peut être mise sous la forme suivante,

$$I = \frac{A}{d} (\sigma_A \varepsilon_A \Delta T_A + \sigma_A \Delta \varphi_A) = \frac{A}{d} (\sigma_B \varepsilon_B \Delta T_B + \sigma_B \Delta \varphi_B)$$

- 3) Les intégrales des équations de transport de la chaleur sur le volume sont le produit des intégrales sur la section de surface A et des intégrales sur la longueur d des métaux,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{j}_{Q_A} \cdot d\mathbf{S} \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \kappa_A \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_A) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &+ T_{AB} \varepsilon_A \int_S \mathbf{j}_{q_A} \cdot d\mathbf{S} \int_{-d}^0 d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ \int_S \mathbf{j}_{Q_B} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \kappa_B \int_0^d d\mathbf{r} \cdot (-\nabla T_B) \int_S d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &+ T_{AB} \varepsilon_B \int_S \mathbf{j}_{q_B} \cdot d\mathbf{S} \int_0^d d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

En utilisant les relations intégrales pour I_Q , I , ΔT_A et ΔT_B , l'intégrale de l'équation de transport de la chaleur à travers les métaux A et B peut être mise sous la forme suivante,

$$I_Q = \kappa_A \frac{A}{d} \Delta T_A + T_{AB} \varepsilon_A I = \kappa_B \frac{A}{d} \Delta T_B + T_{AB} \varepsilon_B I$$

- 4) En utilisant la relation $\Delta T_B = \Delta T - \Delta T_A$ dans l'équation de transport de la chaleur, on obtient,

$$\kappa_A \Delta T_A + T_{AB} \varepsilon_A \frac{d}{A} I = \kappa_B (\Delta T - \Delta T_A) + T_{AB} \varepsilon_B \frac{d}{A} I$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\Delta T_A = \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_A}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} \frac{d}{A} I + \frac{\kappa_B}{\kappa_A + \kappa_B} \Delta T$$

En utilisant la relation $\Delta T_A = \Delta T - \Delta T_B$ dans l'équation précédente, on obtient,

$$\Delta T_B = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_B}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} \frac{d}{A} I + \frac{\kappa_A}{\kappa_A + \kappa_B} \Delta T$$

- 5) En substituant l'expression pour ΔT_A dans l'équation de transport de la charge électrique, on obtient,

$$I = \sigma_A \frac{\varepsilon_A (\varepsilon_B - \varepsilon_A)}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} I + \sigma_A \frac{\varepsilon_A \kappa_B}{\kappa_A + \kappa_B} \frac{A}{d} \Delta T + \sigma_A \frac{A}{d} \Delta \varphi_A$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\Delta \varphi_A = \left(\frac{1}{\sigma_A} - \frac{\varepsilon_A (\varepsilon_B - \varepsilon_A)}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} \right) \frac{d}{A} I - \frac{\varepsilon_A \kappa_B}{\kappa_A + \kappa_B} \Delta T$$

De manière similaire, en substituant l'expression pour ΔT_B dans l'équation de transport de la charge électrique, on obtient,

$$I = \sigma_B \frac{\varepsilon_B (\varepsilon_A - \varepsilon_B)}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} I + \sigma_B \frac{\varepsilon_B \kappa_A}{\kappa_A + \kappa_B} \frac{A}{d} \Delta T + \sigma_B \frac{A}{d} \Delta \varphi_B$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\Delta \varphi_B = \left(\frac{1}{\sigma_B} - \frac{\varepsilon_B (\varepsilon_A - \varepsilon_B)}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} \right) \frac{d}{A} I - \frac{\varepsilon_B \kappa_A}{\kappa_A + \kappa_B} \Delta T$$

- 6) Une expression de la différence de potentiel électrostatique $\Delta \varphi$ entre les extrémités du barreau est obtenue en substituant les expressions pour $\Delta \varphi_A$ et $\Delta \varphi_B$ dans l'équation $\Delta \varphi = \Delta \varphi_A + \Delta \varphi_B$,

$$\Delta \varphi = \left[\left(\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} \right) + \frac{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2}{\kappa_A + \kappa_B} T_{AB} \right] \frac{d}{A} I - \frac{\varepsilon_A \kappa_B + \varepsilon_B \kappa_A}{\kappa_A + \kappa_B} \Delta T$$

Le premier terme entre crochets représente la loi d'Ohm. Le dernier terme de l'équation représente l'effet Seebeck. Le deuxième terme entre crochets a pour origine les gradients thermiques dans chaque métal, même dans le cas où $\Delta T = 0^{(2)}$.

⁽²⁾ L. Gravier, S. Serrano-Guisan, F. Reuse, J.-Ph. Ansermet, "Spin-Dependent Peltier Effect of Perpendicular Currents in Multilayered Nanowires", *Phys. Rev.*, B 73, 2006, 052410.